Grado en Ingeniería Civil – Ejercicios de Análisis Matemático

Inducción matemática

1. Prueba, usando el principio de inducción matemática, que para todo número natural $n \in \mathbb{N}$ se verifican las igualdades siguientes.

   a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

   d) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

   e) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

2. Prueba, usando el principio de inducción matemática, que para todo número natural $n \in \mathbb{N}$ se verifican las desigualdades siguientes.

   a) $\sqrt{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n}$

   b) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} \geqslant 1 + \dfrac{n}{2}$

   c) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+3n}}$.

   d) $\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)} < \dfrac{2}{(n+1)\sqrt{2n+4}}$.

3. Prueba que para todo número natural $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $n^5 - n$ es divisible por 5.

4. Prueba que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos cualesquiera es divisible por 9.

5. Prueba, usando el principio de inducción matemática, que para todo número natural $n \in \mathbb{N}$ se verifica que
$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$
es un número natural.

6. Concluida la primera vuelta de la liga de un país con gran afición al fútbol, se observa que no se ha producido ningún empate. Probar que puede hacerse una lista de todos los equipos participantes, de forma que cada equipo de la lista haya ganado el partido que jugó contra el siguiente en la lista.